УДК 517.983.54

Г. Г. Скорик

К ВОПРОСУ О ТОЧНОЙ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА СРЕДНИХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ*

1. Постановка задачи и предварительные сведения

Рассматривается задача устойчивой аппроксимации производной

$$(Ty)(t) \equiv \frac{d^m y(t)}{dt^m} = x(t), m \geq 1 \tag{1.1}$$

в пространстве $C(-\infty, \infty)$, когда функция y задана своим δ-приближением $y_\delta(t)$, $\|y(t) - y_\delta(t)\| \leq \delta$. Регуляризующее семейство операторов R_α, которое порождает устойчивый метод аппроксимации, конструируется на основе метода средних функций [1,2]

$$R_\alpha y_\delta(t) = \int_{|t-s|\leq\alpha} \frac{d^m \omega_\alpha(t,s)}{dt^m} y_\delta(s)\, ds, \tag{1.2}$$

где $\omega_\alpha(t,s)$ – семейство усредняющих m-непрерывно дифференцируемых по t и s функций, удовлетворяющих некоторым условиям (см. п. 2).

Для оценки погрешности метода вводится класс допустимых функций – множество равномерной регуляризации

$$M_r^p = \left\{ y(t) : \quad y \in C^{m+p}(-\infty, \infty), \quad \|y^{(m+p)}(t)\|_C \leq r \right\}, \tag{1.3}$$

где $p \geq 1$. Тогда для задачи дифференцирования (1.1) погрешность метода аппроксимации (регуляризации) R на классе M_r^p характеризуется величиной

$$\begin{aligned} \gamma_\delta(T; R; M_r^p) = \sup\{ \|Ry_\delta - Ty\|_C : \quad \|y - y_\delta\|_C \leq \delta, \\ y \in M_r^p,\ y_\delta \in C(-\infty, \infty)\}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Метод средних функций в задаче дифференцирования был предложен в работе [1], где при $m = 1,\ p = 1$ для функции Соболева $\omega_\alpha(t,s)$ была вычислена мажорантная оценка величины $\gamma_\delta(d/dt, R_\alpha, M_r^p)$ и показана оптимальность метода по порядку. В работе [3] рассмотрен случай $m = 1,\ p = 2$ и также получена оценка сверху величины γ_δ.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ.

В настоящей статье для целого класса средних функций вида

$$\omega_\alpha(t,s) = c_\alpha \omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)$$

точно вычислена величина γ_δ для произвольных m и p (пп. 1,2), при подходящей связи между α и δ с r показана оптимальность по порядку (п. 3). Дан отрицательный ответ на вопрос о возможности построения оптимального регуляризатора для случая $m = 1$, $p = 1$ на основе метода средних функций с гладкими $\omega_\alpha(t,s) = c_\alpha\omega\left((t-s)/\alpha\right)$ и указан способ построения регуляризатора, сколь угодно близкого к оптимальному (п. 4).

Дадим необходимые определения.

Определение 1.1. *Пусть X, Y – линейные нормированные пространства. Семейство отображений $\{R_\alpha\}$, $R_\alpha : Y \to X$ называется регуляризующим семейством операторов или регуляризующим алгоритмом (PA) задачи* (1.1) *в точке y, если выполнены условия:*

1) $\exists \alpha = \alpha(\delta) : \ \forall \delta > 0 \ \alpha(\delta) > 0 \ \& \ \lim\limits_{\delta\to 0} \alpha(\delta) = 0$;

2) $\forall \alpha > 0 \ \ \mathfrak{D}(R_\alpha) = Y$;

3) $\lim\limits_{\delta\to 0} \sup\limits_{y_\delta : \|y-y_\delta\|\le\delta} \|R_{\alpha(\delta)} y_\delta - Ty\| = 0.$

Если условие 3 *выполнено для любого $y \in \mathfrak{D}(T)$, то говорят о PA для задачи* (1.1). *Если $\{R_\delta\}$ – PA для* (1.1), *то множество*

$$\{x_\delta : \ x_\delta = R_\delta y_\delta, \ 0 < \delta \le \delta_0\}$$

называется регуляризованным семейством приближенных решений, а каждый оператор R_δ – регуляризатором задачи.

Сформулируем задачу о нахождении наилучшего линейного регуляризатора для задачи (1.1) на множестве M_r^p. Пусть

$$\inf_{R\in B(Y\to X)} \gamma_\delta(T; R; M_r^p) = \Omega_\delta(T; M_r^p), \tag{1.5}$$

где $B(Y \to X)$ – пространство линейных ограниченных операторов из Y в X.

Определение 1.2. *Оператор R_δ^*, на котором реализуется нижняя грань в задаче* (1.5), *называется оптимальным регуляризатором задачи* (1.1) *на классе M_r^p, а $\{R_\delta^* : 0 < \delta \le \delta_0\}$ оптимальным регуляризующим семейством.*

Величина $\Omega_\delta(T; M_r^p)$ – погрешность оптимального метода для задачи (1.1) на классе M_r^p при заданном уровне погрешности δ.

Определение 1.3. *Регуляризующее семейство операторов $\{R_\delta\}$ называется оптимальным по порядку на множестве M_r^p, если*

$$\frac{\sup\{\|R_\delta y_\delta - Ty\| : \ y \in M_r^p, \|y - y_\delta\| \le \delta\}}{\Omega_\delta(T; M_r^p)} \le K < \infty, \tag{1.6}$$

где $K \ge 1$; $K = 1$ соответствует оптимальному алгоритму.

2. Оценка погрешности метода сверху

Пусть $\{\omega_\alpha(t,s)\}$ – параметризованное семейство функций, обладающее свойствами:

1) функция $\omega_\alpha(t,s)$ непрерывно дифференцируема по совокупности переменных до m-го порядка включительно;

2) носителем функции $\omega_\alpha(t,s)$ является множество $|t-s| \le \alpha$;

3) $\forall t, s \in \mathbb{R} \quad \int_{|t-s|\le\alpha} \omega_\alpha(t,s)\, ds = \int_{|t-s|\le\alpha} \omega_\alpha(t,s)\, dt = 1.$

При этих условиях функция

$$y^\alpha(t) = \int_{|t-s|\le\alpha} \omega_\alpha(t,s) y(s)\, ds, \ \forall y(s) \in C(-\infty,\infty) \tag{2.1}$$

непрерывно дифференцируема m раз и аппроксимирует $y(t)$ при $\alpha \to 0$ в пространстве L_p (см. [4]).

Функция y^α, определенная формулой (2.1), называется средней функцией от $y \in C(-\infty,\infty)$. Нетрудно проверить, что

$$\frac{d^m y^\alpha(t)}{dt^m} = \int_{|t-s|\le\alpha} \frac{d^m \omega_\alpha(t,s)}{dt^m} y(s)\, ds.$$

Это соотношение вместе с упомянутым свойством аппроксимации средней функции дает основание конструировать регуляризатор для задачи (1.1) в форме (1.2).

Приведем пример функции $\omega_\alpha(t,s)$, обладающей свойствами 1–3. Это усредняющая функция Соболева [4]

$$\omega_\alpha(t,s) = \begin{cases} c_\alpha \exp\left[(t-s)^2 / \left((t-s)^2 - \alpha^2\right)\right], & |t-s| < \alpha \\ 0, & |t-s| \ge \alpha, \end{cases}$$

где $c_\alpha = \left[\int_{-\alpha}^{\alpha} \exp\left[(t-s)^2/\left((t-s)^2-\alpha^2\right)\right]\, ds\right]^{-1}$.

Пусть $\omega_\alpha(t,s) = c_\alpha \omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)$, где функция $\omega(x)$ непрерывно дифференцируема m раз и имеет своим носителем отрезок $[-1,1]$, т.е. $\omega(x) = 0$ при $x \notin [-1,1]$.

Величина c_α определяется из условия, что

$$\int_{|t-s|\le\alpha} \omega_\alpha(t,s)\, ds = 1 \Leftrightarrow \int_{|t-s|\le\alpha} c_\alpha \omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right) ds = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} \alpha c_\alpha \omega\left(x\right)\, dx = 1 \Leftrightarrow c_\alpha = \frac{1}{\alpha h},$$

где $h = \int_{-1}^{1} \omega(x)\, dx$.

При этих условиях регуляризатор (1.2) принимает вид

$$R_\alpha y(t) = c_\alpha \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \frac{d^m}{dt^m}\left(\omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)\right) y(s)\, ds = \frac{1}{\alpha^{m+1}h}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \omega^{(m)}\left(\frac{t-s}{\alpha}\right) y(s)\, ds.$$

Введем обозначения:

$h_k = \int_{-1}^{1} \omega(x) x^k\, dx, \quad \nu_k = \int_{-1}^{1} \left|\frac{d^k}{dx^k}\omega(x)\right| dx, \ (k = 1, 2, \dots, m),$

$d_p = \int_0^1 \left|\int_x^1 \omega(s)(x-s)^{p-1}\, ds\right| dx + \int_{-1}^{0} \left|\int_{-1}^{x} \omega(s)(x-s)^{p-1}\, ds\right| dx.$

Теорема 2.1. *Пусть функция $\omega \in C^{(m)}(-\infty,\infty)$ имеет своим носителем отрезок $[-1,1]$. Если $p = 1$ или $p > 1$ & $h_k = 0$ для любого $k: \ 1 \le k \le p-1$, то справедлива оценка*

$$\gamma_\delta(T; R_\alpha; M_r^p) \le \frac{\delta \nu_m}{h\alpha^m} + \frac{r d_p \alpha^p}{h(p-1)!}.$$

В противном случае $\gamma_\delta(T; R_\alpha; M_r^p) = \infty$, т.е. погрешность метода неограниченна.

Доказательство. Пусть $p \ge 2$ и существует такое $k: \ 1 \le k \le p-1$, что $h_k \ne 0$. Выберем $y_\delta = y$ и зафиксируем t. Тогда

$$\|R_\alpha y_\delta - Ty\| \ge |R_\alpha y_\delta(t) - Ty(t)| = |R_\alpha y(t) - Ty(t)|.$$

Оценим $|R_\alpha y(t) - Ty(t)|$. Вначале преобразуем $R_\alpha y(t)$, интегрируя по частям и используя свойство 2 функции ω_α:

$$R_\alpha y(t) = \frac{1}{\alpha^{m+1}h}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \omega^{(m)}\left(\frac{t-s}{\alpha}\right) y(s)\, ds = \frac{1}{\alpha^m h}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \omega^{(m-1)}\left(\frac{t-s}{\alpha}\right) y'(s)\, ds.$$

Продолжая дальше таким же образом, получаем

$$R_\alpha y(t) = \frac{1}{\alpha h}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)\frac{d^m}{ds^m}y(s)\,ds. \tag{2.2}$$

Таким образом,

$$R_\alpha y(t) - Ty(t) = \frac{1}{\alpha h}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)(y^{(m)}(s)-y^{(m)}(t))\,ds =$$

$$= \frac{1}{\alpha h}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)\left(\sum_{i=1}^{p-1}\frac{y^{(m+i)}(t)}{i!}(s-t)^i + \frac{y^{(m+p)}(\xi)}{p!}(s-t)^p\right)ds, \tag{2.3}$$

где ξ – некоторая точка между s и t.

Далее, взяв функцию y такую, что в фиксированной точке t, $y^{(m+k)}(t)\neq 0$, а для $1\le i\le p-1, i\neq k \quad y^{(m+i)}(t)=0$, имеем оценку

$$|R_\alpha y(t) - Ty(t)| =$$

$$= \frac{1}{\alpha h}\left|\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)\left(\frac{y^{(m+k)}(t)}{k!}(s-t)^k + \frac{y^{(m+p)}(\xi)}{p!}(s-t)^p\right)ds\right| \ge$$

$$\ge \frac{1}{\alpha h}\left(\left|\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)\frac{y^{(m+k)}(t)}{k!}(s-t)^k\,ds\right| -\right.$$

$$\left.-\left|\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)\frac{y^{(m+p)}(\xi)}{p!}(s-t)^p\,ds\right|\right) \ge$$

$$\ge \left|\frac{y^{(m+k)}(t)\alpha^k}{k!h}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)^k d\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)\right| +$$

$$+\frac{r\alpha^p}{p!h}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\left|\omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)^p\right| d\left(\frac{t-s}{\alpha}\right) =$$

$$= \left|\frac{y^{(m+k)}(t)\alpha^k}{k!h}\int_{-1}^{1}\omega(x)x^k\,dx\right| - \frac{r\alpha^p}{p!h}\int_{-1}^{1}|\omega(x)x^p|\,dx = \left|y^{(m+k)}(t)\right|A - B,$$

где A и B – некоторые константы, не зависящие от функции y. Отсюда

$$\|R_\alpha y - Ty\|_C \ge |y^{(m+k)}(t)|A - B$$

и, следовательно,

$$\gamma_\delta(T;R_\alpha;M_r^p) \ge \left(\sup_{y\in M_r}|y^{(m+k)}(t)|\right)A - B.$$

Значит, $\gamma_\delta(T; R_\alpha; M_r^p) = \infty$, поскольку можно выбрать функцию $y \in M_r^p$ со сколь угодно большим значением $y^{(m+k)}(t)$.

Теперь пусть $h_k = 0$, $1 \le k \le p-1$. В неравенстве

$$\|R_\alpha y_\delta - Ty\| \le \|R_\alpha y_\delta - R_\alpha y\| + \|R_\alpha y - Ty\|$$

оценим каждое слагаемое в правой части. Возьмем некоторое t и рассмотрим

$$|R_\alpha y_\delta(t) - Ty(t)| \le |R_\alpha y_\delta(t) - R_\alpha y(t)| + |R_\alpha y(t) - Ty(t)|.$$

Для первого слагаемого имеем

$$|R_\alpha y_\delta(t) - R_\alpha y(t)| = \frac{1}{\alpha^{m+1}h}\left|\int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \omega^{(m)}\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)(y_\delta(s) - y(s))\,ds\right| \le$$
$$\le \frac{\delta}{\alpha^{m+1}h}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\left|\omega^{(m)}\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)\right| ds = \frac{\delta}{\alpha^m h}\int_{-1}^{1}\left|\omega^{(m)}(x)\right| dx = \frac{\delta\nu_m}{\alpha^m h},$$

откуда ввиду произвольности t

$$\|R_\alpha y_\delta(t) - R_\alpha y(t)\| \le \frac{\delta\nu_m}{\alpha^m h}. \tag{2.4}$$

Оцениваем второе слагаемое. Чтобы оценка была наиболее точной, в формуле (2.3) возьмем интегральное представление остаточного члена разложения функции $y^{(m)}$ в ряд Тейлора

$$R_\alpha y(t) - Ty(t) = \frac{1}{\alpha h}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)\left(\sum_{i=1}^{p-1}\frac{y^{(m+i)}(t)}{i!}(s-t)^i + F_p(s)\right) ds,$$

где $F_p(s) = \frac{1}{(p-1)!}\int_t^s y^{(m+p)}(x)(s-x)^{p-1}\,dx$. Далее,

$$R_\alpha y(t) - Ty(t) =$$
$$= \frac{1}{\alpha h}\sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{y^{(m+i)}(t)}{i!}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)(s-t)^i\,ds\right) + \int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)F_p(s)\,ds =$$
$$= \frac{1}{\alpha h}\sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{y^{(m+i)}(t)\alpha^{i+1}(-1)^{i+1}}{i!}h_i\right) + \int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)F_p(s)\,ds.$$

По условию теоремы $h_i = 0$, поэтому

$$R_\alpha y(t) - Ty(t) = \frac{1}{\alpha h}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)F_p(s)\,ds =$$
$$= \frac{1}{\alpha h(p-1)!}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)\int_t^s y^{(m+p)}(x)(s-x)^{p-1}\,dx\,ds.$$

После замены переменных

$$\begin{cases} s = t - \alpha s_1, & ds = -\alpha ds_1 \\ x = t - \alpha x_1, & dx = -\alpha dx_1 \end{cases}$$

приходим к следующей формуле

$$\begin{aligned} &R_\alpha y(t) - Ty(t) = \\ &= \frac{\alpha^p}{h(p-1)!} \int_{-1}^{1}\int_{0}^{s_1} \omega(s_1) y^{(m+p)}(t-\alpha x_1)(x_1 - s_1)^{p-1}\, dx_1\, ds_1 = \\ &= \frac{\alpha^p}{h(p-1)!} \left(\int_{0}^{1}\int_{0}^{s_1} \omega(s_1) y^{(m+p)}(t-\alpha x_1)(x_1 - s_1)^{p-1}\, dx_1\, ds_1 - \right. \\ &\left. - \int_{-1}^{0}\int_{s_1}^{0} \omega(s_1) y^{(m+p)}(t-\alpha x_1)(x_1 - s_1)^{p-1}\, dx_1\, ds_1 \right) = \\ &= \frac{\alpha^p}{h(p-1)!} \left(\int_{0}^{1} y^{(m+p)}(t-\alpha x_1) \int_{x_1}^{1} \omega(s_1)(x_1 - s_1)^{p-1}\, ds_1\, dx_1 - \right. \\ &\left. - \int_{-1}^{0} y^{(m+p)}(t-\alpha x_1) \int_{-1}^{x_1} \omega(s_1)(x_1 - s_1)^{p-1}\, ds_1\, dx_1 \right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Далее для любого t получаем оценку

$$\begin{aligned} |R_\alpha y(t) - Ty(t)| \le \frac{\alpha^p r}{h(p-1)!} &\left(\int_{0}^{1} \left| \int_{x_1}^{1} \omega(s_1)(x_1 - s_1)^{p-1}\, ds_1 \right| dx_1 + \right. \\ &\left. + \int_{-1}^{0} \left| \int_{-1}^{x_1} \omega(s_1)(x_1 - s_1)^{p-1}\, ds_1 \right| dx_1 \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|R_\alpha y(t) - Ty(t)\| \le \frac{\alpha^p r d_p}{h(p-1)!}. \tag{2.6}$$

Объединяя неравенства (2.4) и (2.6) с формулой (1.4), получаем

$$\gamma_\delta(T; R_\alpha; M_r^p) \le \frac{\delta \nu_m}{h\alpha^m} + \frac{r d_p \alpha^p}{h(p-1)!}. \tag{2.7}$$

Теорема доказана.

Неравенство (2.7) было получено на основе неравенства треугольника с помощью довольно точных оценок каждого слагаемого. Поэтому возникает вопрос, не является ли эта оценка точной в целом. Другими словами, можно ли в (2.7) знак неравенства заменить на знак равенства. Ответу на этот вопрос будет посвящен следующий раздел.

3. Исследование точности мажорантной оценки

В дальнейшем нам потребуется утверждение, которое, по-видимому, известно. Тем не менее, для полноты изложения дадим точную формулировку и приведем полное доказательство этого факта.

Лемма 3.1. *Пусть $f \in C(a,b)$, $g \in M = \Big\{ y \in C[a,b] : \|y\|_{C(a,b)} \le m \Big\}$. Тогда*

$$\left| \int_a^b f(s) g(s)\, ds \right| \le m \int_a^b |f(s)|\, ds,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists g_\varepsilon \in M \qquad \int_a^b f(s) g_\varepsilon(s)\, ds \ge m \int_a^b |f(s)|\, ds - \varepsilon,$$

т. е. $\sup\limits_{g \in M} \left| \int_a^b f(s) g(s)\, ds \right| = m \int_a^b |f(s)|\, ds.$

Доказательство. Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует интеграл Лебега, равный интегралу Римана. Далее будем работать с интегралами Лебега. Введем обозначение

$$Q_\delta = \{ x \in [a,b] : \quad 0 < f(x) < \delta \}.$$

Поскольку функция f непрерывна на $[a,b]$, то множество Q_δ открыто и, следовательно, состоит из не более, чем счетного числа непересекающихся интервалов. Мера Лебега $|Q_\delta|$ множества Q_δ равна сумме длин этих интервалов.

$$Q_\delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n), \quad |Q_\delta| = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n).$$

Легко видно, что множества Q_δ обладают следующими свойствами.

1) $\bigcap\limits_{\delta > 0} Q_\delta = \varnothing$;

2) $\forall\ 0 < \delta_1 < \delta_2 \quad Q_{\delta_1} \subseteq Q_{\delta_2} \Rightarrow |Q_{\delta_1}| \le |Q_{\delta_2}|$.

Следовательно, $\lim\limits_{\delta \to 0} |Q_\delta| = 0$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|Q_\delta| < \varepsilon$. Обозначим

$$S_\delta^+ = \{ x \in [a,b] : \ f(x) \ge \delta \},$$
$$S_\delta^- = \{ x \in [a,b] : \ f(x) \le 0 \},$$

тогда $[a,b] = S_\delta^+ \cup S_\delta^- \cup Q_\delta$.

Строим функцию g_ε следующим образом:

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} m, & x \in S_\delta^+ \\ -m, & x \in S_\delta^-. \end{cases}$$

Доопределим функцию g_ε на множестве Q_δ. Пусть $x \in (a_n, b_n)$, где (a_n, b_n) – один из интервалов множества Q_δ. Из непрерывности функции f следует, что $f(a_n) \in \{0, \delta\}$ и $f(b_n) \in \{0, \delta\}$, поэтому $g_\varepsilon(a_n) \in \{-m, m\}$ и $g_\varepsilon(b_n) \in \{-m, m\}$. Тогда доопределим функцию g_ε по правилу

$$\forall x \in (a_n, b_n) \quad \frac{g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(a_n)}{g_\varepsilon(b_n) - g_\varepsilon(a_n)} = \frac{x - a_n}{b_n - a_n}.$$

Осталось доказать, что функция g_ε непрерывна на отрезке $[a, b]$. Обозначим через q_δ множество интервалов из Q_δ таких, что $g_\varepsilon(a_n) \neq g_\varepsilon(b_n)$. Поскольку функция f непрерывна на компакте $[a, b]$, то она равномерно непрерывна. Следовательно,

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \gamma_\delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \gamma_\delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \delta.$$

Так как $|f(a_n) - f(b_n)| = \delta$, то $b_n - a_n \geq \gamma_\delta > 0$. Следовательно, множество q_δ состоит из конечного числа интервалов (в противном случае их общая длина была бы бесконечной, что невозможно). По построению видно, что на множестве $[a, b] \backslash q_\delta$ функция g_ε принимает значения $\pm m$. Значит, g_ε – кусочно линейная непрерывная функция.

По условию функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, поэтому f ограничена на [a,b]. Значит, существует константа L такая, что $\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leq L$. По построению $\forall x \in [a, b] \quad |g_\varepsilon(x)| \leq m$. Отсюда

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) g_\varepsilon(x)\,dx &= \int_{S_\delta^+} f(x) g_\varepsilon(x)\,dx + \int_{S_\delta^-} f(x) g_\varepsilon(x)\,dx + \int_{Q_\delta} f(x) g_\varepsilon(x)\,dx = \\
&= m \int_{S_\delta^+} f(x)\,dx - m \int_{S_\delta^-} f(x)\,dx + \int_{Q_\delta} f(x) g_\varepsilon(x)\,dx = \\
&= m \int_{S_\delta^+ \cup S_\delta^-} |f(x)|\,dx + \int_{Q\delta} f(x) g_\varepsilon(x)\,dx \geq \\
&\geq m \int_{S_\delta^+ \cup S_\delta^-} |f(x)|\,dx - \left| \int_{Q\delta} f(x) g_\varepsilon(x)\,dx \right| \geq \\
&\geq \left(m \int_a^b |f(x)|\,dx - m \int_{Q\delta} |f(x)|\,dx \right) - m \int_{Q\delta} |f(x)|\,dx = \\
&= m \int_a^b |f(x)|\,dx - 2m \int_{Q\delta} |f(x)|\,dx \geq m \int_a^b |f(x)|\,dx - 2mL\varepsilon.
\end{aligned}$$

Осталось взять $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2mL}$, чтобы получить нужное неравенство

$$\int_a^b f(x)g_\varepsilon(x)\,dx \geq m\int_a^b |f(x)|\,ds - \varepsilon_1.$$

Так как все функции непрерывны, то это неравенство справедливо и для римановских интегралов.

Теперь можно сформулировать теорему.

Теорема 3.1. *Пусть функция $\omega \in C^{(m)}(-\infty,\infty)$ имеет своим носителем отрезок $[-1,1]$. Пусть либо $p = 1$, либо функция ω такая, что $h_k = 0$, $1 \leq k \leq p-1$. Тогда*

$$\gamma_\delta(T;R_\alpha;M_r^p) = \frac{\delta\nu_m}{h\alpha^m} + \frac{rd_p\alpha^p}{h(p-1)!}.$$

Доказательство. Зафиксируем некоторое число $t \in \mathbb{R}$ и рассмотрим

$$R_\alpha y_\delta(t) - Ty(t) = (R_\alpha y_\delta(t) - R_\alpha y(t)) + (R_\alpha y(t) - Ty(t)).$$

Далее исследуем оба слагаемых по отдельности. Для первого слагаемого имеем представление

$$\begin{aligned} R_\alpha y_\delta(t) - R_\alpha y(t) &= \frac{1}{\alpha^{m+1}h}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\omega^{(m)}\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)(y_\delta(s)-y(s))\,ds = \\ &= \frac{1}{\alpha^m h}\int_{-1}^{1}\omega^{(m)}(x)(y_\delta(t-\alpha x)-y(t-\alpha x))\,dx. \end{aligned}$$

Обозначим $\Delta(x) = (y_\delta(t-\alpha x) - y(t-\alpha x)$. Тогда по условиям теоремы для функций $\Delta(x)$ и $\omega^{(m)}(x)$ выполняются условия леммы 3.1. Следовательно,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta(x) : \|\Delta\|_C \leq \delta \quad \& \int_{-1}^{1}\omega^{(m)}(x)\Delta(x)\,dx \geq \delta\int_{-1}^{1}|\omega^{(m)}(x)|\,dx - \varepsilon\alpha^m h$$

(будем рассматривать только такие ε, что правая часть неравенства больше нуля). Окончательно получаем

$$\begin{aligned} R_\alpha y_\delta(t) - R_\alpha y(t) &= \frac{1}{\alpha^m h}\int_{-1}^{1}\omega^{(m)}(x)\Delta(x)\,dx \geq \\ &\geq \frac{\delta}{\alpha^m h}\int_{-1}^{1}|\omega^{(m)}(x)|\,dx - \varepsilon \geq \\ &\geq \frac{\delta\nu_m}{\alpha^m h} - \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Рассмотрим второе слагаемое. По равенству (2.5)

$$R_\alpha y(t) - Ty(t) = \frac{\alpha^p}{h(p-1)!}\left(\int_0^1 y^{(m+p)}(t-\alpha x)\int_x^1 \omega(s)(x-s)^{p-1}\,ds\,dx\, + \right.$$
$$\left. + \int_{-1}^0 y^{(m+p)}(t-\alpha x)\int_x^{-1} \omega(s)(x-s)^{p-1}\,ds\,dx\right).$$

Обозначим

$$f_1(x) = \int_x^{-1} \omega(s)(x-s)^{p-1}\,ds, \quad f_2(x) = \int_x^1 \omega(s)(x-s)^{p-1}\,ds,$$
$$g(x) = y^{(m+p)}(t-\alpha x).$$

По условиям теоремы для функций $f_1(x)$, $g(x)$ на отрезке $[-1,0]$ и для функций $f_2(x)$, $g(x)$ на отрезке $[0,1]$ выполнены условия леммы 3.1. Следовательно,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists g_1(x), g_2(x) : \|g_1\|_{C[-1,0]} \le r, \|g_2\|_{C[0,1]} \le r$$
$$R_\alpha y(t) - Ty(t) \ge \frac{r\alpha^p}{h(p-1)!}\left(\int_{-1}^0 |f_1(x)|\,dx + \int_0^1 |f_2(x)|\,dx\right) - 2\varepsilon.$$

Определим функцию $g_\delta(x)$, непрерывную на $[-1,1]$ по формуле

$$g_\delta(x) = \begin{cases} g_1(x), & x\in[-1,0],\\ g_1(0) + (g_2(\delta)-g_1(0))\frac{x}{\delta}, & x\in(0,\delta),\\ g_2(x), & x\in[\delta,1].\end{cases}$$

Тогда имеем оценку снизу

$$R_\alpha y(t) - Ty(t) = \frac{r\alpha^p}{h(p-1)!}\left(\int_{-1}^0 f_1(x)g_\delta(x)\,dx + \int_0^1 f_2(x)g_\delta(x)\,dx\right) =$$
$$= \frac{r\alpha^p}{h(p-1)!}\left(\int_{-1}^0 f_1(x)g_1(x)\,dx + \int_0^1 f_2(x)g_2(x)\,dx - \right.$$
$$\left. - \int_0^\delta f_2(x)(g_2(x)-g_\delta(x))\,dx\right) \ge$$
$$\ge \frac{r\alpha^p}{h(p-1)!}\left(\int_{-1}^0 |f_1(x)|\,dx + \int_0^1 |f_2(x)|\,dx - 2\max_{x\in[0,1]} f_2(x) r\delta\right) - 2\varepsilon.$$

Выбрав $\delta = (\varepsilon h(p-1)!)/(2r^2\alpha^p \max\limits_{x\in[0,1]} f_2(x))$, окончательно находим

$$\forall\varepsilon>0\ \exists g(x) : \|g\|_{C[-1,1]} \le r \quad R_\alpha y(t) - Ty(t) \ge \frac{r d_p \alpha^p}{h(p-1)!} - 3\varepsilon. \tag{3.2}$$

Объединяя неравенства (3.1) и (3.2), получим

$$R_\alpha y_\delta(t) - Ty(t) \geq \frac{\delta\nu_m}{\alpha^m h} + \frac{rd_p\alpha^p}{h(p-1)!} - 4\varepsilon.$$

Итак, для выбранных нами функций y и y_δ выполняется неравенство

$$\|R_\alpha y_\delta - Ty\| \geq |R_\alpha y_\delta(t) - Ty(t)| \geq \frac{\delta\nu_m}{\alpha^m h} + \frac{rd_p\alpha^p}{h(p-1)!} - 4\varepsilon.$$

Принимая во внимание, что так выбрать функции можно для любого $\varepsilon > 0$, а также учитывая (1.4), имеем

$$\gamma_\delta(T; R_\alpha; M_r^p) \geq \frac{\delta\nu_m}{h\alpha^m} + \frac{rd_p\alpha^p}{h(p-1)!}. \tag{3.3}$$

Из неравенств (2.7) и (3.3) следует искомая формула

$$\gamma_\delta(T; R_\alpha; M_r^p) = \frac{\delta\nu_m}{h\alpha^m} + \frac{rd_p\alpha^p}{h(p-1)!}. \tag{3.4}$$

4. Проблема оптимальности метода

В предыдущем разделе мы получили точное значение погрешности метода. Естественно выбрать параметр α таким, чтобы эта погрешность была минимальной. Минимизируя правую часть оценки (3.4), находим наилучшее значение параметра

$$\alpha = \left(\frac{m\delta\nu_m(p-1)!}{prd}\right)^{\frac{1}{m+p}}.$$

При таком выборе α

$$\gamma_\delta(T; R_\alpha; M_r^p) =$$
$$= \frac{d_p^{\frac{m}{m+p}}\nu_m^{\frac{p}{m+p}}}{h_m}\left(\left(\frac{p}{m(p-1)!}\right)^{\frac{m}{m+p}} + \frac{1}{(p-1)!}\left(\frac{m}{p}\right)^{\frac{p}{m+p}}\right)\delta^{\frac{p}{m+p}}r^{\frac{m}{m+p}}.$$

Заметим, что параметры d_p и ν_m можно записать в виде

$$d_p = \int_{-1}^{1}\left|\int_x^{\operatorname{sgn} x}\omega(s)(x-s)^{p-1}\,ds\right|dx,$$
$$\nu_m = \bigvee_{-1}^{1}\left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\omega(x)\right],$$

где знак $\bigvee\limits_a^b$ обозначает вариацию функции на отрезке $[a,b]$. Если функция ω является неотрицательной, то параметр d_p можно упростить:

$$\begin{aligned} d_p &= \int_0^1 \int_x^1 \omega(s)(s-x)^{p-1}\,ds\,dx + \int_{-1}^0 \int_{-1}^x \omega(s)(x-s)^{p-1}\,ds\,dx = \\ &= \int_0^1 \int_0^s \omega(s)(s-x)^{p-1}\,dx\,ds + \int_{-1}^0 \int_s^0 \omega(s)(x-s)^{p-1}\,dx\,ds = \\ &= \int_0^1 \omega(s)\frac{s^p}{p}\,ds + \int_{-1}^0 \omega(s)\frac{(-s)^p}{p}\,ds = \frac{1}{p}\int_{-1}^1 \omega(s)|s|^p\,ds \end{aligned}$$

Заметим, что к настоящему времени известны оптимальные регуляризаторы при всех m,p (см. [6]). Естественно возникает вопрос: можно ли построить оптимальный регуляризатор на основе метода средних функций?

Рассмотрим случай, когда $m=1$, $p=1$, а функция ω удовлетворяет условиям теоремы 3.1. При этих условиях погрешность метода средних функций $\gamma_\delta = \frac{2\sqrt{\nu_1 d_1}}{h}\sqrt{\delta r}$. Для этого случая, когда в пространстве непрерывных функций оценивается первая производная при ограниченной второй, известен оптимальный регуляризатор с погрешностью $\Omega_\delta(T;M_r^1) = \sqrt{2\delta r}$ (см. [5]). Из определения 1.3 следует, что $K = K(\omega) = \frac{\sqrt{2\nu_1 d_1}}{h} \geq 1$. Наша задача состоит в том, чтобы проверить, существует ли такая функция ω, для которой коэффициент K равен единице, что означает оптимальность метода.

Лемма 4.1. *Если функция ω удовлетворяет условиям теоремы* 3.1 *для $m=1$ и $p=1$ и такова, что $K=1$, тогда*

$$\forall x \in [-1,0] \quad \int_{-1}^x \omega(s)\,ds \geq 0, \qquad \forall x \in [0,1] \quad \int_x^1 \omega(s)\,ds \geq 0. \tag{4.1}$$

Доказательство. Будем доказывать от противного. Обозначим

$$\Omega_+(x) = \int_x^1 \omega(s)\,ds, \qquad \Omega_-(x) = \int_{-1}^x \omega(s)\,ds.$$

Пусть для определенности существует такая точка $x_0 \in [0,1]$, что $\Omega_+(x_0) < 0$. Обозначим $x_{\min} = \inf\{x : x \in [0,1],\, \Omega_+(x) < 0\}$. Определим новую функцию по формуле

$$\overline{\omega}(x) = \begin{cases} \omega(x), & x \in [-1, x_{\min}], \\ 0, & x \in (x_{\min}, 1]. \end{cases}$$

Так как при этих условиях $\overline{\omega}(1) = \omega(1) = 0$, $\Omega_+(x_{\min}) = 0$, легко видеть, что

$$\begin{aligned}
\nu_1(\overline{\omega}) &= \bigvee_{-1}^{1} \overline{\omega} = \bigvee_{-1}^{x_{\min}} \omega + |\omega(x_{\min}) - \omega(1)| \le \bigvee_{-1}^{1} \omega = \nu_1(\omega),\\
d_1(\overline{\omega}) &= \int_{-1}^{0} \left| \int_{-1}^{x} \omega(s)\,ds \right| dx + \int_{0}^{x_{\min}} |\Omega_+(x)|\,dx < \\
&< \int_{-1}^{0} \left| \int_{-1}^{x} \omega(s)\,ds \right| dx + \int_{0}^{1} |\Omega_+(x)|\,dx = d_1(\omega),\\
h(\overline{\omega}) &= \int_{-1}^{x_{\min}} \omega(x)\,dx = \int_{-1}^{x_{\min}} \omega(x)\,dx + \Omega_+(x_{\min}) = h(\omega).
\end{aligned}$$

Следовательно, $K(\overline{\omega}) < K(\omega) = 1$. Конечно, функция $\overline{\omega}$ может не быть непрерывно дифференцируемой или даже просто непрерывной. Но всегда найдется непрерывно дифференцируемая функция ω_0, как угодно близкая к $\overline{\omega}$ и такая, что $K(\omega_0) < K(\omega)$. Приходим к противоречию, так как коэффициент K не может быть меньшим 1 по определению оптимального метода.

Аналогично проводится доказательство для $\Omega_-(x)$.

Поскольку мы ищем такую функцию ω, чтобы метод средних функций был оптимальным, то по предыдущей лемме ее следует искать среди функций, удовлетворяющих условию (4.1). Тогда

$$\begin{aligned}
d_1 &= \int_{0}^{1}\int_{x}^{1} \omega(s)\,ds\,dx + \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{x} \omega(s)\,ds\,dx = \\
&= \int_{0}^{1}\int_{0}^{s} \omega(s)\,dx\,ds - \int_{-1}^{0}\int_{0}^{s} \omega(s)\,dx\,ds = \\
&= \int_{-1}^{1} \omega(s)|s|\,ds.
\end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
L &= \max_{x\in[-1,1]} \omega(x),\\
x_{\max} &= \operatorname{argmax}\{\omega(x) : x \in [-1,1]\},\\
\beta &= \frac{h}{2L}.
\end{aligned}$$

Так как $h = \int_{-1}^{1} \omega(x)\,dx < 2L$, то $\beta < 1$.

Лемма 4.2. *Если непрерывная функция ω удовлетворяет условию* (4.1), *то*

$$\exists [x_1, x_2] \subset (-\beta, \beta) : \quad \forall x \in [x_1, x_2] \quad \omega(x) < L.$$

Доказательство. Доказываем от противного.

Пусть для всех $x \in [-\beta, \beta]$ $\omega(x) = L$. Тогда $\int_{-\beta}^{\beta} \omega(x)\, dx = 2\beta L = h$. Следовательно,

$$\int_{-1}^{-\beta} \omega(x)\, dx + \int_{\beta}^{1} \omega(x)\, dx = 0 \Leftrightarrow \Omega_-(-\beta) + \Omega_+(\beta) = 0.$$

Поскольку $\Omega_-(-\beta) \geq 0$ и $\Omega_+(\beta) \geq 0$, поэтому $\Omega_-(-\beta) = 0$ и $\Omega_+(\beta) = 0$. Из непрерывности функции ω и того, что $\omega(\beta) = L > 0$, следует существование $\varepsilon > 0$ такого, что $\beta + \varepsilon < 1$ и $\omega(x) > 0$, $x \in [\beta, \beta + \varepsilon]$. Поэтому

$$\int_{\beta}^{\beta+\varepsilon} \omega(x)\, dx > 0 \Rightarrow \int_{\beta}^{\beta+\varepsilon} \omega(x)\, dx + \Omega_+(\beta + \varepsilon) = \Omega_+(\beta) = 0.$$

Следовательно, $\Omega_+(\beta + \varepsilon) < 0$, что противоречит условиям леммы.

Лемма 4.3. *Пусть функция ω удовлетворяет условиям теоремы* 3.1 *и условию* (4.1). *Тогда*

$$\int_{\beta}^{1} \omega(x)|x|\, dx \geq \beta \int_{\beta}^{1} \omega(x)\, dx, \quad \int_{-1}^{-\beta} \omega(x)|x|\, dx \geq \beta \int_{-1}^{-\beta} \omega(x)\, dx.$$

Доказательство. Докажем первое неравенство. Для второго доказательство аналогично. Так как $\frac{d}{dx}\Omega_+(x) = -\omega(x)$, то

$$\int_{\beta}^{1} \omega(x)|x|\, dx = -\int_{\beta}^{1} x\, d\Omega_+(x) = -x\Omega_+(x)\Big|_{\beta}^{1} + \int_{\beta}^{1} \Omega_+(x)\, dx =$$
$$= \beta \int_{\beta}^{1} \omega(x)\, dx + \int_{\beta}^{1} \Omega_+(x)\, dx.$$

По условиям леммы для всех $x \in [0, 1]$ $\Omega_+(x) \geq 0$. Поэтому $\int_{\beta}^{1} \Omega_+(x)\, dx \geq 0$, а следовательно,

$$\int_{\beta}^{1} \omega(x)|x|\, dx \geq \beta \int_{\beta}^{1} \omega(x)\, dx.$$

Эти три леммы позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 4.1. *Пусть $m = 1$, $p = 1$ и функция ω удовлетворяет условиям теоремы* 3.1. *Тогда для этой функции ω константа K из формулы* (1.6) *удовлетворяет строгому неравенству $K > 1$, т. е. метод средних функций с гладким ядром вида $\omega_\alpha(t, s) = c_\alpha \omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)$ не является оптимальным, а только оптимальным по порядку.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $d_1 > L\beta^2$. В самом деле, по свойству вариации $\nu_1 = \bigvee\limits_{-1}^{1} \omega \geq |\omega(x_{\max}) - \omega(-1)| + |\omega(1) - \omega(x_{\max})| = 2L$, а следовательно,

$$K^2 = \frac{2\nu_1 d_1}{h^2} \geq \frac{4Ld_1}{h^2} = \frac{d_1}{L\,(h^2/(4L^2))} = \frac{d_1}{L\beta^2}.$$

Если $d_1 > L\beta^2$, то $K > 1$.

Используя равенство $\int_{-\beta}^{\beta} L|x|\,dx = L\beta^2$ и лемму 4.3, получаем

$$\begin{aligned}
d_1 - L\beta^2 = \int_{-1}^{1} \omega(x)|x|\,dx - \int_{-\beta}^{\beta} L|x|\,dx = \int_{-1}^{-\beta} \omega(x)|x|\,dx + \int_{\beta}^{1} \omega(x)|x|\,dx - \\
- \int_{-\beta}^{\beta} (L - \omega(x))|x|\,dx = \int_{-1}^{-\beta} \omega(x)|x|\,dx + \int_{\beta}^{1} \omega(x)|x|\,dx - \\
- \int_{-\beta}^{x_1} (L - \omega(x))|x|\,dx - \int_{x_2}^{\beta} (L - \omega(x))|x|\,dx - \int_{x_1}^{x_2} (L - \omega(x))|x|\,dx \geq \\
\geq \beta \int_{-1}^{-\beta} \omega(x)\,dx + \beta \int_{\beta}^{1} \omega(x)\,dx - \beta \int_{-\beta}^{x_1} (L - \omega(x))\,dx - \\
- \beta \int_{x_2}^{\beta} (L - \omega(x))\,dx - \int_{x_1}^{x_2} (L - \omega(x))|x|\,dx.
\end{aligned}$$

Поскольку $|x_1| < \beta$, $|x_2| < \beta$ и для всех $x \in [x_1, x_2]$ $\quad L - \omega(x) > 0$, имеем

$$\int_{x_1}^{x_2} (L - \omega(x))|x|\,dx < \beta \int_{x_1}^{x_2} (L - \omega(x))\,dx.$$

Поэтому

$$d_1 - L\beta^2 > \beta \left(\int_{-1}^{1} \omega(x)\,dx - \int_{-\beta}^{\beta} L\,dx \right) = \beta(h - 2\beta L) = \beta(h - h) = 0.$$

Следовательно, мы доказали, что $d_1 > 2\beta L$, а значит, и $K > 1$.

Хотя мы доказали, что для случая $m = 1$ и $p = 1$ метод средних функций при любых допустимых функциях ω не будет оптимальным, можно выбрать такие ω, что метод станет сколь угодно близким к оптимальному, т. е. можно говорить об асимптотической оптимальности метода средних функций.

Следующий пример показывает, как строить такие усредняющие ядра ω, если в качестве основы взять функцию Соболева.

Рассмотрим последовательность функций $\{\omega_n(x)\}$ вида

$$\omega_n(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{x^{2n}}{x^{2n}-1}\right), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\nu_1(\omega_n) = 2, \quad \lim_{n\to\infty} d_1(\omega_n) = 1, \quad \lim_{n\to\infty} h(\omega_n) = 2,$$

следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} K(\omega_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\nu_1(\omega_n)d_1(\omega_n)}}{h(\omega_n)} = 1.$

Литература

1. Васин В. В. Регуляризация задачи численного дифференцирования // Матем. зап. Урал. ун-та. 1969. Т. 7, № 2. С. 29–33.
2. Васин В. В. Об устойчивом вычислении производной в пространстве $C(-\infty,\infty)$ // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 1967. Т. 13, № 6. С. 1383–1389.
3. Groetch C. W. Optimal order of accuracy in Vasin's method for differentiation of noisy functions // J. Optimiz. Theory Appl. 1992. Vol. 74, № 2. P. 373–378.
4. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
5. Стечкин С. Б. Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 137–148.
6. Арестов В. В. Приближение неограниченых операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи матем. наук. 1996. Т. 51, вып. 6. С. 89–124.

Статья поступила 04.12.2002 г.
Окончательный вариант 20.03.2003 г.